Chap. 4 : Convergence des suites
Feuille d'exercices

Exercice 1 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez avec une démonstration ou un contre exemple.

1. Une suite est toujours majorée ou minorée.
2. Toute suite convergente est monotone (eventuellement APCR).
3. Le produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite quelconque converge vers 0.
4. Une suite positive qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
5. Si la suite $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l ou $-l$.
6. Si la suite $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et convergent vers la même limite.

Exercice 2 Calculez les limites des suites définies par les termes généraux suivants :

1. $u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$.
2. $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{1+n^2+n^3}$.
3. $u_n = \dfrac{4n^4+3n^2+1}{n^2+n^3-2n^4}$.
4. $u_n = \dfrac{|\sin(n)|}{n+1}$.
5. $u_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$
6. $u_n = \dfrac{2^n}{n^5+3n+1}$.
7. $u_n = \dfrac{2^n+n}{2^n}$.
8. $u_n = n^2(\dfrac{1}{2})^n \sin(n!)$.
9. $u_n = n^2 - n\cos n + 2$.
10. $u_n = \sqrt{\dfrac{n^2+1}{n+3}}$.
11. $u_n = (n-3)\sqrt{\dfrac{n^3+1}{n^2+3}}$.
12. $u_n = 4n - \sqrt{n^2+1}$.
13. $u_n = n - \sqrt{n^2+1}$.
14. $u_n = (n^4+1)(n^3+2)e^{-n}$.
15. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n+1}$.
16. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Exercice 3 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies conjointement par $u_0 = 0$ et $v_0 = 2$ et les relations :

$$u_n = \frac{3u_{n-1}+v_{n-1}}{4} \qquad v_n = \frac{u_{n-1}+3v_{n-1}}{4}$$

1. Écrire un programme en Python qui calcule les $n$ièmes termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Étudiez la suite $(u_n - v_n)$ et montrez que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. Exprimez le terme général de la suite $t_n = u_n + v_n$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction :

1.
```
def uetv(n):
    u=0
    v=2
    for k in range(n):
        u,v=(3u+v)/4,(u+3v)/4
    return (u,v)
```

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= \frac{3u_{n-1}+v_{n-1}-u_{n-1}-3v_{n-1}}{4} \\ &= \frac{1}{2}(u_{n-1}-v_{n-1}) \end{aligned}$$

De plus, $u_0 - v_0 = -2$.

La suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de premier terme -2. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n - v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} (*).$$

On constate donc que :

$$u_n - v_n \to 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + v_n}{4} - u_n = \frac{1}{4}(v_n - u_n) \overset{(*)}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3v_n + u_n}{4} - v_n = \frac{1}{4}(u_n - v_n) \overset{(*)}{=} -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. Les suites $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes, elles sont convergentes vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= u_{n+1} + v_{n+1} \\ &= \frac{3u_n + v_n}{4} + \frac{u_n + 3v_n}{4} \\ &= \frac{4u_n + 4v_n}{4} \\ &= u_n + v_n \\ &= t_n. \end{aligned}$$

Donc $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante, égale à son premier terme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = t_0 = u_0 + v_0 = 2.$$

Mais alors, $t_n = u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell + \ell = 2\ell$. Donc, par unicité de la limite, $2 = 2\ell$. On en conclut que $\boxed{\ell = 1}$

Exercice 4 Montrer que les suites définies pour $n > 0$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

sont adjacentes. On ne demande pas la valeur de la limite commune.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

donc $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)^2}{n(n+1)^2} < 0$$

donc $\boxed{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$

Enfin, soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$b_n - a_n = \frac{1}{n} \to 0$$

donc $\boxed{\text{les suites sont adjacentes}}$.

Exercice 5 On considère les suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n! \cdot n}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Leur limite commune est (par définition en fait) le nombre e. Montrer que e est un nombre irrationnel.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$
donc $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$
donc $\boxed{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$
Enfin, soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$b_n - a_n = \frac{1}{n \cdot n!} \to 0$$
donc $\boxed{\text{les suites sont adjacentes}}$ et on admet que leur limite commune est e.
2. Supposont par l'absurde que e est rationnel, donc il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec $e = \frac{p}{q}$. On a, puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante :
$$a_q < a_{q+1} \leq \mathrm{e} \leq b_{q+1} < b_q$$
Par suite
$$a_q < \frac{p}{q} < a_q + \frac{1}{q \cdot q!}$$
puis
$$q!a_q < p \cdot (q-1)! < q!a_q + \frac{1}{q}$$
Or $p \cdot q! \in \mathbb{Z}$ et $q \cdot q! \cdot a_q = q \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{Z}$ car la somme apparaît comme une somme d'entiers : pour tout k on a $\frac{q!}{k!} = (k+1)(k+2)\cdots q \in \mathbb{N}$. C'est absurde ! La différence entre deux entiers est au moins de 1 pas de de $\frac{1}{q}$. Donc :
$$\boxed{e \text{ n'est pas rationnel.}}$$

Exercice 6 Soient a et b deux nombres réels strictement positifs avec $a \leq b$

1. Montrez que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$
2. Soient les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$\begin{cases} a_0 &= a \\ a_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 &= b \\ b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$
Justifier que a_n et b_n existent pour tout $n \in \mathbb{N}$ et montrez que $a_n \leq b_n$.
3. Montrez que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Justifiez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} \leq b_{n+1} - a_n$ et montrez que $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.
5. En déduire que $b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}(b-a)$ et que les suites a_n et b_n sont adjacentes.

Remarque : $\sqrt{ab}$ est appelé moyenne géométrique de a et de b, tandis que $\frac{a+b}{2}$ est appelé moyenne arithmétique.
La limite commune des suites a_n et b_n est appelé moyenne arithmético-géométrique de a et de b.

1. On a
$$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + B - 2\sqrt{ab}.$$
Donc
$$\boxed{\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.}$$

2. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n$ et b_n sont définis et que $0 \leq a_n \leq b_n$.
Initialisation : $0 \leq a_0 = a \leq b = b_0$ donc la proposition est vraie au rang $n = 0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que a_n et b_n sont définis et que $0 \leq a_n \leq b_n$.
Puisque $0 \leq a_n \leq b_n$, a_{n+1} et b_{n+1} sont définis. De plus, en utilisant le résultat de la question 1, on récupère directement que $0 \leq a_{n+1} \leq b_{n+1}$.
Conclusion : On a donc bien montré que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n \leq b_n.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n b_n} - a_n = \sqrt{a_n}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}) \geq 0 \quad \text{car } x \to \sqrt{x} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.$$
$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leq 0.$$
Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

4. Puisque pour tout n on a $a_{n+1} > a_n$, on a bien aussi $b_{n+1} - a_{n+1} < b_{n+1} - a_n$.
D'autre part, $b_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$ et on a donc le résultat recherché.

5. Il suffit de faire une récurrence avec le résultat précédent. On a donc bien deux suites décroissantes par le théorème d'encadrement car
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Exercice 7 On considère une suite de réels strictement positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l \in [0, +\infty]$$

1. Montrer que si $l < 1$:
$$u_n \to 0$$
2. Montrer que si $l > 1$:
$$u_n \to +\infty$$
3. Montrer que le cas $l = 1$ présente une indétermination.

Je vous conseille de faire un dessin pour comprendre la démarche.

1. Supposons que $l < 1$. Le dessin pousse à poser $\varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0$. Alors, par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n > N, \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon < 1.$$
Notons $q = l + \varepsilon = \frac{1-l}{2}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_{N+p+1} < q \cdot u_{N+p}$$
Par récurrence immédiate :
$$u_{N+p} \leq q^p \cdot u_N$$
Or $0 < q < 1$ donc $q^p \to 0$, ce qui montre que $u_n \to 0$ (en utilisant le théorème des gendarmes).

2. Supposons que $l > 1$. Le dessin pousse à poser $\varepsilon = \frac{l-1}{2} > 0$. Alors, par définition de la limite, il existe

$N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n > N, \frac{u_{n+1}}{u_n} > l - \varepsilon > 1.$$

Notons $q = l - \varepsilon = \dfrac{l-1}{2}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{N+p+1} > q \cdot u_{N+p}$$

Par récurrence immédiate :

$$u_{N+p} \geq q^p \cdot u_N$$

Or $q > 1$ donc $q^p \to +\infty$, ce qui montre que $u_n \to +\infty$.

3. Le cas $l = 1$ est indéterminé.
   Par exemple, si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$ alors $l = 1$ et $u_n \to 1$.
   Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \to l = 1$ et $u_n \to +\infty$.
   Si $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n}{n+1} \to l = 1$ et $u_n \to 0$.

Exercice 8 Déduire de l'exercice précédent la limite de la suite :

$$v_n = \frac{a^n}{n!}$$

($a > 1$ est un réel fixé)

Exercice 9 On considère la suite définie par $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 10 (Difficile) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On considère $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad v_n = \frac{u_0 + u_1 + \dots u_n}{n+1}$$

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l alors il en est de même de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Réciproque ?
2. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ alors il en est de même de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Réciproque ?

Ces deux résultats assez utiles en pratique s'appellent le théorème de la moyenne de Césaro.

1. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n > N \implies l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \tag{1}$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ et soit N donné par (1). On a, pour $n > N$,

$$v_n = \frac{u_0 + \dots + u_N}{n+1} + \frac{u_{N+1} + \dots + u_n}{n+1}.$$

Via (1), on a :

$$l - \varepsilon + \frac{N+1}{n+1}(l-\varepsilon) = \frac{n-N}{n+1}(l-\varepsilon) < \frac{u_{N+1} + \dots + u_n}{n+1} < \frac{n-N}{n+1}(l+\varepsilon) = l + \varepsilon + \frac{N+1}{n+1}(l+\varepsilon)$$

Donc :

$$l - \varepsilon + \frac{N+1}{n+1}(l-\varepsilon) + \frac{u_0 + \dots + u_N}{n+1} < v_n < l + \varepsilon + \frac{N+1}{n+1}(l+\varepsilon) + \frac{u_0 + \dots + u_N}{n+1} \tag{2}$$

Puisque N est fixé, $\dfrac{u_0 + \dots + u_N}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $\dfrac{N+1}{n+1}(l+\varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc $\exists M \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > M \implies ((-\varepsilon < \frac{u_0 + \dots + u_N}{n+1} + \frac{N+1}{n+1}(l-\varepsilon) < \varepsilon) \text{ et } (-\varepsilon < \frac{u_0 + \dots + u_N}{n+1} + \frac{N+1}{n+1}(l+\varepsilon) < \varepsilon)) \tag{3}$$

En utilisant (2) et (3), on a, pour $n > M$:

$$\boxed{l - 2\varepsilon < v_n < l + 2\varepsilon}$$

C'est presque le résultat qu'on veut, on voit qu'en prenant initialement $\frac{\varepsilon}{2}$ on obtient le résultat cherché.

Pour la réciproque, il est facile de voir qu'elle est fausse :
Prenons $u_n = (-1)^n$. Il est facile de voir que $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ mais pourtant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente.

2. La preuve est très similaire, mais en considérant cette fois-ci le rang à partir duquel la suite est plus grande qu'un réel M. Je vous laisse l'écrire, je mettrai une version corrigée plus explicite quand j'aurai le temps.
La réciproque est encore fausse : il suffit de prendre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{2n} = n \text{ et } u_{2n+1} = 0.$$

Cette suite n'admet pas de limite ; pourtant $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.

Exercice 11 Soient u une suite à termes strictement positifs et $b \in \mathbb{R}_+$. Démontrer, en utilisant le théorème de Césaro, que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = b$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right)^{\frac{1}{n}} = b$$

Correction :
Je ne vais pas corriger, juste donner un indice : pour transformer un produit en somme, on peut utiliser le logarithme. (Il faut aussi utiliser le fait que ln est continue, mais on insistera là-dessus plus tard dans l'année).

Exercice 12 (Lemme de l'escalier)
Soient u une suite de nombres réels et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Démontrer, en utilisant l'exercice 10, que si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = l$, $100^{\xi'}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = \ell$ (ce résultat est appelé lemme de l'escalier).
2. En déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.
3. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$ et de $\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$.